* Peut-on calculer une aire approchée entre une courbe et l’axe des abscisses sur un intervalle donné?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser la méthode des rectangles.

Il faut savoir qu’il existe plusieurs autres manières d’y procéder mais qui sont beaucoup plus complexes et qui nécessitent plusieurs heures à expliquer.

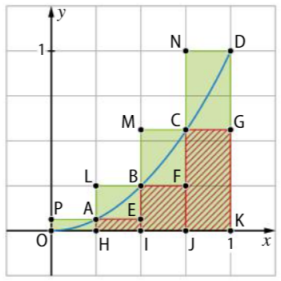
Avant ça, pour éclairer le sujet, la méthode des rectangles était utilisée durant des siècles avant que le calcul intégral n’apparaisse. Ce calcul intégral a été développé au XVIIe siècle avec les travaux de Newton, Leibniz et d’autres mathématiciens notamment Bon aventura. Mais le calcul intégral permet de connaître l’aire exacte alors que la question demande une aire approchée. Donc on va voir comment on calcule l’aire sous une courbe à l’aide de la méthode des rectangles.

Pour trouver une valeur approchée de l'aire entre une courbe et l'axe des abscisses sur un intervalle donné, on considère une fonction f continue sur un intervalle. C’est à partir de cette fonction que la courbe prendra une certaine forme.  On découpe l'intervalle en *n* intervalles et entre chaque intervalle n, on construit des rectangles. Il faut savoir que + n est petit et + la valeur approchée de l’aire est précise. L’approximation sera donc d’autant meilleure que le découpage de l'intervalle est important.

Après avoir placé ses rectangles entre chaque intervalle, pour calculer cette aire, il s’agit de calculer l’aire de chaque rectangle puis de faire la somme de toutes les aires. On sait que l’aire d’un rectangle se calcule par la multiplication de sa longueur et sa largeur.

* Pour identifier la longueur, eh bien la longueur de chaque rectangle (qui est parallèle à l’axe des ordonnées) est égale à l'image de l’abscisse par la fonction qui est donnée et la largeur équivaut à la différence des extrémités du rectangle sur l’axe des abscisses.
* Enfin, on fait la somme de l’aire de chaque rectangle et c’est cette somme qui est alors une valeur approchée de l’aire recherchée.

Voyons un exemple :

Supposons qu’on ait une fonction carrée où f(x) = x² et l’intervalle [0;1]. On veut calculer l’aire de f entre la courbe et l’axe des abscisses  sur l’intervalle [0;1]. Pour cela, on divise l’axe des abscisses en 4 parties, on ne veut pas plus précis que ça donc l’intervalle donne(0: 0,25; 0,5; 0,75; 1) càd que chaque partie est égale à 0,25. On obtient alors 3 rectangles: le rectangle entre 0,25 et 0,5, le rectangle entre 0,5 et 0,75 et le rectangle entre 0,75 et 1. Donc ici on ne va pas compter le rectangle de 0 à 0.25.

La fonction étant x², la longueur équivaut à l’abscisse au carré.

(on ne compte pas le rectangle  de 0 à 0,25 car la fonction carrée ne coupe pas l’axe des ordonnées strictement en 0. Ce qui fait que la largeur de ce rectangle est inférieure à 0,25). Une fois les rectangles définis, il suffit de calculer l’aire de chaque rectangle et de les additionner.

* Une autre méthode pratique pour calculer l’aire entre une courbe et l’axe des abscisses : la méthode des trapèzes, qui n'est pas au programme en France et qui consiste à construire des trapèzes au lieu des rectangles. Le côté du rectangle le plus proche de la courbe ayant un angle limité puisqu’il doit former un angle droit, celui du trapèze peut au contraire s’adapter à la courbe et fera que l’aire sera d’autant plus précise que si on utilisait la méthode des rectangles.

Pour conclure et pour répondre à la question, évidemment, il est donc possible de calculer une aire approchée de l’aire sous une courbe et de plusieurs manières : avec la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles. Si l’on veut une aire exacte, la méthode qu’il faut utiliser est celle du calcul intégral. Pour la méthode des rectangles, on retient que plus l’intervalle est divisé par un grand nombre, plus il y aura de parties et plus l’aire sera précise et se rapprochera de l’aire exacte.